多面的に探る（表）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

問題

x，y が $x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ を
満たすとき，xy の最大値を求めよ。

担当する解法（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

グループＡ…相加平均･相乗平均の関係の利用

解法

相加平均･相乗平均の関係より

$1=x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

が成り立つ。すなわち，$xy \leqq \frac{1}{2}$

また，等号成立は $x=y$ のとき。

$x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ より

$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，xy の最大値は $\frac{1}{2}$

グループＢ…微分法（数学Ⅲ）の利用

解法

$y=\sqrt{1-x^2}$ より　$xy=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ $(0<x<1)$ を考える。

$f'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，xy の最大値は $\frac{1}{2}$

自分が担当する解法以外の方法

グループＣ…三角関数の利用

解法

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおけるので

$xy=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ $(0<2\theta<\pi)$

よって，$2\theta=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，xy は最大。

$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，xy の最大値は $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{課題}}$

任意の正の数 x，y に対して，つねに

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

【ヒント】

与えられた不等式は　$k \geqq \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\ (>0)$ …①

と式変形できる。

グループA…相加平均･相乗平均の関係の利用

$\boxed{\text{解法}}$

①の両辺を２乗すると　$k^2 \geqq \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ …②

$\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ について

$x>0$，$y>0$ より　$x+y \geqq 2\sqrt{xy}$

$$1 \geqq \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$$

すなわち　$2 \geqq 1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ (等号成立は $x=y$ のとき) …③

②，③より　与えられた不等式が常に成り立つのは　$k^2 \geqq 2$

$k>0$ と合わせて，　$k \geqq \sqrt{2}$　　よって，k の最小値は $\sqrt{2}$

グループB…微分法（数学Ⅲ）の利用

$\boxed{\text{解法}}$

①において　$t=\dfrac{y}{x}\ (>0)$ とおくと　①の (右辺)$=\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$

ここで，$f(t)=\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$ とすると，

$$f'(t)=\frac{1}{t+1}\left(\frac{\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}}-\frac{1+\sqrt{t}}{2\sqrt{t+1}}\right)=\frac{1-\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}(t+1)}$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	↗	$\sqrt{2}$	↘

$t=1$ のとき，$f(t)$ の最大値は $\sqrt{2}$

よって，与えられた不等式が常に成り立つのは　$k \geqq \sqrt{2}$

したがって，k の最小値は $\sqrt{2}$

グループC…三角関数の利用

$\boxed{\text{解法}}$

①において

$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=1$ であるから，

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}=\cos\theta$，$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}=\sin\theta$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。

①の (右辺)$=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$$-1<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

よって，与えられた不等式が常に成り立つのは　$k \geqq \sqrt{2}$

したがって，k の最小値は $\sqrt{2}$